ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ THỊ GIANG

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ HỘI TỤ MẠNH GIẢI BÀI TOÁN KHÔNG ĐIỂM CHUNG TÁCH TỔNG QUÁT TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. TS. Trương Minh Tuyên
2. TS. Phạm Hồng Trường

Thái Nguyên – 2020

Lời cảm ơn

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới TS. Trương Minh Tuyên, TS. Phạm Hồng Trường đã luôn tận tình hướng dẫn, chỉ bảo và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc tới các thầy, cô trong khoa Toán–Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong thời gian học tập và nghiên cứu tại trường.

Qua đây tác giả xin chân thành cảm ơn tới người thân trong gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã luôn động viên tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn này.

Mục lục

Lời cảm ơn **ii**

Một số ký hiệu và viết tắt **v**

Mở đầu **1**

Chương 1 Một số kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Một số đặc trưng của không gian Hilbert 3

1.2 Ánh xạ không giãn và toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert 9

1.2.1 Ánh xạ không giãn 9

1.2.2 Toán tử đơn điệu 10

1.3 Phương pháp lặp Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm tìm điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn 14

1.3.1 Phương pháp lặp Halpern 14

1.3.2 Phương pháp xấp xỉ mềm 14

1.4 Phương pháp CQ giải bài toán chấp nhận tách 15

1.5 Một số bổ đề bổ trợ 17

Chương 2 Một số định lý hội tụ mạnh cho bài toán không điểm chung tách tổng quát **22**

2.1 Bài toán không điểm chung tách tổng quát 22

2.2 Phương pháp lặp kiểu Halpern kết hợp với phương pháp CQ . . 23

2.3 Phương pháp xấp xỉ mềm kết hợp với phương pháp CQ 28

2.4 Một số ứng dụng 31

2.4.1 Bài toán không điểm chung tách 31

2.4.2 Bài toán điểm cực tiểu tách tổng quát 32

2.4.3 Bài toán chấp nhận tách tổng quát 34

2.4.4 Bài toán cân bằng tách tổng quát 36

2.4.5 Bất đẳng thức biến phân tách tổng quát 38
2.5 Ví dụ số minh họa 40

Kết luận **42**

Tài liệu tham khảo **43**

Một số ký hiệu và viết tắt

H	không gian Hilbert
$\langle .,. \rangle$	tích vô hướng trên H
$\|.\|$	chuẩn trên H
$\cup$	phép hợp
$\cap$	phép giao
$\mathbb{R}_+$	tập các số thực không âm
$G(A)$	đồ thị của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Trong thực tế một sự vật, hiện tượng được chuyển đổi từ trạng thái x^* (thông tin đầu vào, nguyên liệu) sang trạng thái b (kết quả đầu ra, sản phẩm) có thể phải chuyển qua một hay nhiều quá trình "biến đổi" liên tiếp. Người ta mong muốn tìm những nguồn hay trạng thái ban đầu x^* dẫn đến trạng thái b của sự vật hiện tượng sau quá trình biến đổi f nào đó. Chẳng hạn, việc tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$. Hoặc người ta cũng muốn tìm nguồn hay trạng thái ban đầu x^* sao cho các quá trình biến đổi liên tiếp là tối ưu nhất theo một nghĩa nào đó. Đây là mô hình của các loại bài toán *tách*.

Ta biết rằng bài toán chấp nhận tách (Split Feasibility Problem), viết tắt là (SFP), lần đầu tiên được đề xuất và nghiên cứu bởi Censor and Elfving [3] với mục đích mô hình hóa một số bài toán ngược. Bài toán này được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm phần tử } x^* \in C \text{ sao cho } T(x^*) \in Q, \tag{0.1}$$

trong đó, C và Q lần lượt là các tập con lồi, đóng và khác rỗng trong các không gian Hilbert thực H_1 và H_2, $T: \ H_1 \longrightarrow H_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn.

Ta có thể thấy rằng các bài toán (0.1), cũng như một số bài toán liên quan, là trường hợp đặc biệt của bài toán tách tổng quát sau đây. Cho X và Y là hai không gian Hilbert hay Banach, và cho $T: \ X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ từ X vào Y. Giả sử (P_1) và (P_2) là hai bài toán cho trước trong X và Y, tương ứng. Xét bài toán tìm một phần tử x^* thuộc X sao cho x^* là một nghiệm của (P_1) và $T(x^*)$ là một nghiệm của (P_2). Ta ký hiệu bài toán này là (P).

Năm 2019 Reich và Tuyen [14] đã lần đầu tiên đề xuất và nghiên cứu dạng tổng quát của Bài toán (P) như sau: Cho $X_1, X_2, \ldots, X_N$ là các không gian Hilbert hay Banach và cho $T_i: \ X_i \longrightarrow X_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, là các ánh xạ từ X_i vào X_{i+1}. Giả sử (P_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, là N bài toán cho trước trên X_i, tương ứng. Khi đó dạng tổng quát của Bài toán (P) là tìm một phần tử

x^* trong X_1 sao cho x^* là một nghiệm của bài toán (P_1), $T_1(x^*)$ là một nghiệm của bài toán (P_2), ..., và $T_{N-1}(T_{N-2}(...T_2(T_1(x^*))))$ là một nghiệm của Bài toán (P_N), họ ký hiệu bài toán này là (GP).

Cụ thể hơn trong [14] Reich và Tuyen đã xét bài toán (GP) với các ánh xạ chuyển T_i là tuyến tính, bị chặn và (P_i) là bài toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại A_i. Bài toán này được gọi là bài toán không điểm chung tách tổng quát (Generalized Split Common Null Point Problem, viết tắt là GSCNPP).

Mục đích của luận văn này là trình bày lại các kết quả của Reich và Tuyen trong [14] về một cải tiến của phương pháp CQ, kết hợp với phương pháp điểm gần kề giải bài toán GSCNPP. Nội dung của luận văn được chia làm hai chương chính, trong đó:

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này tập trung trình bày lại một số tính chất cơ bản về không gian Hilbert, phép chiếu mêtric, hai phương pháp lặp cơ bản tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn (phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ gắn kết). Tiếp theo, đề cập đến phương pháp CQ để giải bài toán chấp nhận tách và cuối cùng là một số bổ đề bổ trợ được sử dụng trong chứng minh các định lý ở Chương 2 của luận văn.

Chương 2. Một số định lý hội tụ mạnh cho bài toán không điểm chung tách tổng quát

Nội dung của chương này đề cập đến các kết quả trong [14] về hai định lý hội tụ mạnh giải bài toán GSCNPP. Một số ứng dụng của các phương pháp lặp cho các bài toán liên quan khác (bài toán không điểm chung tách, bài toán điểm cực tiểu tách tổng quát, bài toán chấp nhận tách tổng quát, bài toán cân bằng tách tổng quát và bất đẳng thức biến phân tách tổng quát) cũng được giới thiệu ở chương này.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm 5 mục chính. Mục 1.1 đề cập đến một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert thực, Mục 1.2 giới thiệu sơ lược một số kết quả về ánh xạ không giãn và toán tử đơn điệu. Mục 1.3 trình bày về phương pháp lặp Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm cho bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn. Mục 1.4 đề cập đến bài toán chấp nhận tách và phương pháp CQ để xấp xỉ nghiệm của bài toán này trong không gian Hilbert. Mục 1.5 giới thiệu một số bổ đề bổ trợ cần sử dụng trong việc trình bày nội dung của Chương 2. Nội dung của chương này phần lớn được tham khảo từ các tài liệu [1, 2, 8, 12].

1.1 Một số đặc trưng của không gian Hilbert

Ta luôn giả thiết H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng được kí hiệu là $\langle ., . \rangle$ và chuẩn được kí hiệu là $\|.\|$.

Trước hết, ta nhắc lại một đặc trưng hình học quan trọng của không gian Hilbert.

Mệnh đề 1.1.1. *Trong không gian Hilbert thực H ta luôn có đẳng thức sau*

$$\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = \|y - z\|^2 + 2\langle x - y, x - z \rangle,$$

với mọi $x, y, z \in H$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle &= \langle y,y\rangle + \langle z,z\rangle + 2\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle - 2\langle x,y\rangle \\ &= [\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle] \\ &\quad + [\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle + \langle z,z\rangle] \\ &= \|x-y\|^2 + \|x-z\|^2.\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.1.2. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, với mọi $x, y \in H$ và mọi $\lambda \in [0,1]$, ta có*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 &= \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)\langle x,y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2 \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2) \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.1.3. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, nếu với $x, y \in H$ thỏa mãn điều kiện*

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|,$$

tức là bất đẳng thức Schwars xảy ra dấu bằng thì hai véc tơ x và y là phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $x \neq \lambda y$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, từ tính chất của tích vô hướng, ta có

$$0 < \|x - \lambda y\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda\langle x,y\rangle + \|x\|^2,$$

với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta thấy rằng nếu $y = 0$, thì hiển nhiên x và y là phụ thuộc tuyến tính. Giả sử $y \neq 0$, khi đó với $\lambda = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, thì bất đẳng thức trên trở thành

$$|\langle x,y\rangle| < \|x\|.\|y\|,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy x và y là phụ thuộc tuyến tính.
Mệnh đề được chứng minh. □

Nhắc lại rằng, dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu về phần tử $x \in H$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

với mọi $y \in H$. Từ tính liên tục của tích vô hướng, suy ra nếu $x_n \to x$, thì $x_n \rightharpoonup x$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn, xét không gian $l^2 = \{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ và $\{e_n\} \subset l^2$, được cho bởi

$$e_n = (0, ..., 0, \underset{\text{vị trí thứ n}}{1}, 0, ..., 0, ...),$$

với mọi $n \geq 1$. Khi đó, $e_n \rightharpoonup 0$, khi $n \to \infty$. Thật vậy, với mỗi $y \in H$, từ bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y\rangle|^2 \leq \|y\|^2 < \infty.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\langle e_n, y\rangle = 0$, tức là $e_n \rightharpoonup 0$. Tuy nhiên, $\{e_n\}$ không hội tụ về 0, vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geq 1$.

Ta biết rằng mọi không gian Hilbert H đều thỏa mãn điều kiện của Opial, tính chất này được thể hiện trong mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.1.4. *Cho H là một không gian Hilbert thực và $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ thỏa mãn điều kiện $x_n \rightharpoonup x$, khi $n \to \infty$. Khi đó, với mọi $y \in H$ và $y \neq x$, ta có*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Vì $x_n \rightharpoonup x$, nên $\{x_n\}$ bị chặn.

Ta có

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle.$$

Vì $x \neq y$, nên

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 &> \liminf_{n\to\infty}(\|x_n - x\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle)\\ &= \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2.\end{aligned}$$

Do đó, ta nhận được

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

Mệnh đề được chứng minh. □